Teoria Cuántica de Campos - Ejercicio del Capitulo 17

Prof. Javier Garcia

21 de abril de 2019

Calcule la Parte Principal de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(x)}{x(x^2+1)} dx$

Necesitamos encontrar una función analítica (de variable compleja), y un contorno simple y cerrado, que atrape la integral impropia, cuyo integrando tiene 3 singularidades[1].La parte real de esta función de variable compleja debe de coincidir con el integrando. Entonces, la estrategia básica es igualar lo que nos dice la *Fórmula Integral de Cauchy* con la suma de las integrales de linea a lo largo cada pedazo de camino del contorno seleccionado, de suerte que uno de los sumandos coincida con[2]

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}$$

.

El contorno $\mathcal{C}$

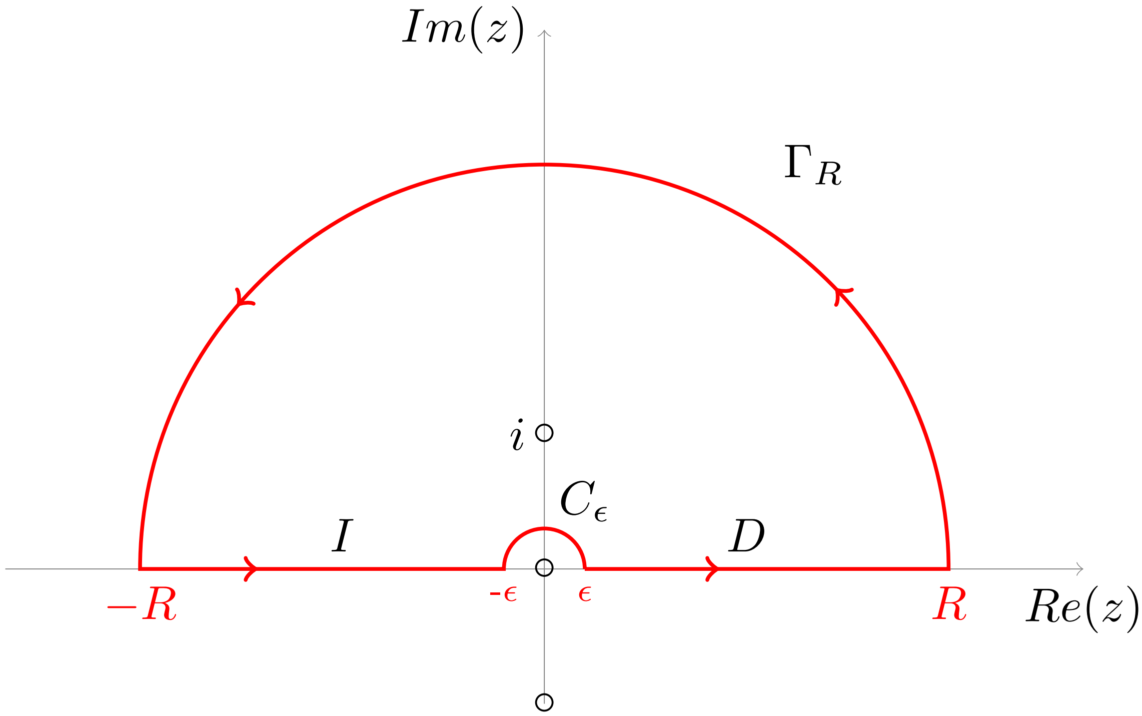
El dominio de integración es $(-\infty, \infty)$, por tanto, conviene seleccionar un semicírculo con centro en $(0, 0)$ y radio R en el plano complejo. El contorno no puede tener singularidades, asi que para evitar el valor singular en $x = 0$, podemos desviarnos haciendo un semicírculo de radio ε, alrededor de $(0, 0)$. Tomando el límite $\varepsilon \to 0$ (y también $R \to \infty$), cubrimos todo el dominio $(-\infty, \infty)$. Rompemos el semicírculo $\mathcal{C}$ en 4 pedazos:

Nombre	Subconjunto parametrizado del plano
I	$(-R, -\varepsilon)$
C_ϵ	$\left\{z \in \mathbb{C} : z = \epsilon e^{i\theta}, \epsilon > 0, \theta(\pi \to 0)\right\}$
D	(ε, R)
Γ_R	$\left\{z \in \mathbb{C} : z = Re^{i\theta}, R > 0, \theta(0 \to \pi)\right\}$

La gráfica siguiente resume el contorno.

[1] Son $x = 0$, $x = i$ y $x = -i$.

[2] Esta es la definición de parte principal, para integrales sobre $(-\infty, \infty)$.



La función

Es fácil embeber el integrando en el plano complejo transformando $x \to z = x + iy$ dando asi $\frac{\sin(z)}{z(z^2+1)}$ pero esto no nos ayuda, dada la forma que parametrizamos el contorno. Necesitamos algo con simetria circular y que contenga la funcion sin() en primer orden. Solo hay que recordar que $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ asi que es suficiente e^{iz} y por lo tanto, escogemos

$$\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$$

para incrustar la integral impropia en el plano complejo y poder analizar el problema usando

$$\oint_{C} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz$$

El cálculo

Tenemos los ingredientes para alimentar la *Fórmula Integral de Cauchy* y también las integrales de camino. Seguiremos la estrategia básica de igualar estas dos cantidades

Cálculo con la Fórmula de Cauchy

Definitivamente, este contorno y la función compleja satisfacen los requisitos del teorema. Ya sabemos cuales son los polos, y el contorno solo encierra a $z = i$. Obtenemos la $f(z)$ del teorema factorizando el denominador como $z(z+i)(z-i)$ y dejamos el polo interior a $\mathcal{C}$ solito:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz &= \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \\ \oint_{\mathcal{C}} \frac{\frac{e^{iz}}{z(z+i)}}{(z-i)^{0+1}} dz &= \frac{2\pi i}{0!} f^{(0)}(i) \\ &= 2\pi i \frac{e^{i^2}}{i(i+i)} \\ &= -i\pi e^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

Cálculo sobre el camino D

En este pedazo[3], la integral de linea es

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon}^{R} \frac{\cos(x) + i\sin(x)}{x(x^2+1)} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x(x^2+1)} dx + i \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)} dx \tag{2}$$

Cálculo sobre el camino Γ_R

La integral por este caminito es

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos(\theta)+i\sin(\theta))}}{Re^{i\theta}(R^2e^{2i\theta}+1)} iRe^{i\theta} d\theta &= i \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos(\theta) - R\sin(\theta))}}{R^2e^{2i\theta}+1} d\theta \\ &= i \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos(\theta))}}{e^{R\sin(\theta)}(R^2e^{2i\theta}+1)} d\theta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Esto esta justificado por el comportamiento oscilante del numerador. El numeradpr mantiene una norma igual a 1[4] y el denominador tiende a infinito. También cabe señalar que el límite y la integración pueden intercambiarse. Formalmente, se puede verificar este límite tomando el valor absoluto y usando desigualdades anaíticas.

[3] Recordar que por este camino, $Im(z) = 0$. Osea, $e^{iz} = e^{ix}$ y $z = x$

[4] $\left|e^{iR\cos(\theta)}\right| = \sqrt{\cos^2(R\cos(\theta)) + \sin^2(R\cos(\theta))} = 1.$

Cálculo sobre el camino I

Este pedazo es como el D pero por la izquierda, la integral de linea es

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0^-}\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{\cos(x)+i\sin(x)}{x(x^2+1)}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{\cos(x)}{x(x^2+1)}dx+i\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx \tag{4}$$

Cálculo sobre el camino C_ϵ

La integral por este arco de radio ϵ es

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}(\epsilon^2e^{2i\theta}+1)}i\epsilon e^{i\theta}d\theta &= i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\epsilon\cos(\theta)-\epsilon\sin(\theta))}}{\epsilon^2e^{2i\theta}+1}d\theta\\ &= i\int_{\pi}^{0}\frac{1}{1}d\theta\\ &= -i\pi\end{aligned} \tag{5}$$

Cálculo final

Hay un detalle y es que, al tomar el límite en (2) y en 4, la parte principal de $\frac{\cos(x)}{x(x^2+1)}$ da cero ya que ese integrando es impar. Finalmente, (1) = (2) + (3) + (4) + (5) nos da

$$\frac{-i\pi}{e}=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx+0-i\pi$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx=\frac{\pi(e-1)}{e}$$